$f(z) = u + iv$

f is analytic fn if:

$u_x = v_y$

$u_y = -v_x$

In polar:

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$

$v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$

f is harmonic fn if:

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$

Ex: Show thate if $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ is analytic then
$u(x,y)$ and $v(x,y)$ are harmonic.

Ex: Show that if $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$ is analytic then
$u(r,\theta)$ and $v(r,\theta)$ are harmonic.

analytic fn:

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$

Harmonic fn:

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$??

$* U_r = \frac{1}{r} V_\theta$ & $V_r = \frac{-1}{r} U_\theta$ $\Leftarrow$ الدالة analytic

$r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\theta\theta} \overset{??}{=} 0$ $\Leftarrow$ عشان تكون الدالة harmonic

$\Rightarrow r U_r = V_\theta$ تفاضل بالنسبة لـ r

$r U_{rr} + U_r = V_{\theta r}$ — ① نعوض عن $V_{\theta r}$

$\Rightarrow r V_r = -U_\theta$

$r V_{\theta r} = -U_{\theta\theta}$

$\cancel{V_{r\theta} = V_{\theta r}}$

$V_{r\theta} = \frac{-1}{r} U_{\theta\theta}$ — ②

$V_{r\theta} = V_{\theta r}$ with ①,②

$r U_{rr} + U_r = \frac{-1}{r} U_{\theta\theta}$

$\therefore r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\theta\theta} = 0$

② كيفية حساب جزء من $f(z)$ بدلالة الآخر

$f(z) = U + iV$, $U_x = V_y$; $U_y = -V_x$ معنى هذه الفكرة أن يعطى U والمطلوب حساب قيمة V أو العكس

U معلوم , V مجهول

$V_y = U_x$ دالة في x

$V = \int \frac{\partial U}{\partial x} dy + C_1(x)$ تكامل بالنسبة لـ y جزئيا ونجعل ثابت التكامل دالة في x

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$ نستخدم الشرط الثاني لمعرفة الثابت

بنفس طريقة التفكير

Ex1: Show that $U = x^2 - y^2 - y$ harmonic and find conjugate harmonic $U_{xx} + U_{yy} = 0$?? , $V = ??$

Sol

$U_x = 2x$ $U_{xx} = 2$

$U_y = -2y - 1$ $U_{yy} = -2$

$U_{xx} + U_{yy} = 0 \Rightarrow \therefore U$ is harmonic

$U_x = V_y$, $U_y = -V_x$

$V_y = 2x$

$V = \int 2x\,dy + C_1(x) = 2xy + C_1(x) \longrightarrow ①$

$U_y = -V_x$

$-2y - 1 = -(2y + C_1'(x))$ هذه الخطوة نعرف منها هل الخطوات صحيحة أم هناك خطأ

$C_1(x) \neq 1$

$C_1(x) = x + C$

$v = 2xy + x + C$

م رقم ١ تختصر عشان الثابت دالة في x

للتعويض في ١

Ex 2: If $u = e^{2x} \cos ay$ is a real part of anlytic fn find the value of a and its conjugate harmonic:

اول إيجاد خاصية نحسب منها قيمة a

ي أن الدالة لا توافقية

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = 2e^{2x} \cos ay$ $\qquad u_y = e^{2x}(-a \sin ay)$

$u_{xx} = 4e^{2x} \cos ay$ $\qquad u_{yy} = -a^2 e^{2x} \cos ay$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

مستفادتش حاجة

$(4 - a^2) e^{2x} \cos ay = 0$ $\qquad \cos ay = 0 \Rightarrow ay = \frac{(2n \pm 1)\pi}{2}$ $\quad$ only $e^{-\infty} =$

$4 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$

$u = e^{2x} \cos 2y \Rightarrow \boxed{1}$

$u_x = v_y \quad , \quad v_x = -u_y$

$v_y = 2e^{2x} \cos 2y$

$v = \frac{2e^{2x} \sin 2y}{2} + C_1(x)$

$v_x = -u_y$

$v_x = 2e^{2x} \cancel{\sin 2y} + C_1'(x) = -(-e^{2x} 2 \cancel{\sin 2y})$

$C_1'(x) = 0 \Rightarrow C_1(x) = C$

$\therefore v = e^{2x} \sin 2y + C$

Ex 3: ① Suppose $f(z)$ and $\overline{f(z)}$ are analytic then $f(z) = $ Constant

② Show that if $f(z)$ is analytic $f(z) = u + iv$ and $|f(z)| = C_1$ then $f(z) = $ Constant

③ Show that if $f(z) = u + iv$ is analytic then $\nabla^2 |f(z)|^2 = 4 \left| \frac{df}{dz} \right|^2$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ $\qquad \boxed{C_1 + i C_2}$

$f(z) = u + iv$

$|f(z)| = C_1 \Rightarrow \sqrt{u^2+v^2} = C_1 \Rightarrow u^2+v^2 = C_1^2$ —— (1)

المطلوب أن نوضح أن ثابت $u =$ دال ثابت $v =$

$u_x = v_y \quad , u_y = -v_x$

$u^2+v^2 = C_1^2$ —— (1) تفاضل (1) بالنسبة لـ x

$2uu_x + 2vv_x = 0$

$uu_x + vv_x = 0$ —— (2)

$2uu_y + 2vv_y = 0$ تفاضل (1) بالنسبة لـ y

$uu_y + vv_y = 0$ —— (3)

$uu_y + vu_x = 0$ —— (4) من (3)

من (2) و(4) نضرب (2) u و (4) v ونجمع

$u^2u_x + uvv_x + vu\,u_y + v^2u_x = 0$

$u_y = -v_x$

$(u^2+v^2)\,u_x = 0$

$u^2+v^2 = C_1^2 \quad \therefore u_x = 0 \Rightarrow u = C_1(y)$

$v_y = 0 \qquad \Rightarrow v = C_2(x)$

similarty نضرب (1) v و (4) u والطرح

$(u^2-v^2)\,v_x = 0$

$u = \pm v \quad \Rightarrow u = \text{constant} \ , v = \text{constant}$

OR $v_x = 0 \qquad \Rightarrow v = C_3(y)$

$\therefore C_3(y) = C_2(x) \qquad \therefore = \text{Constant}$

$v = \text{Constant}$

$v_x = u_y = 0 \quad \Rightarrow u_y = 0$

$u = C_4(x)$

$C_4(x) = C_1(y) = \text{Constant}$

$\therefore f = u + iv = \text{constant}$ where u, v are const.

طريقة الد

أن نبدأ من الطرف الأيسر ونوجد $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2)$ ثم نحسب هذا المقدار ونستخدم أن u, v هارمونيك harmonic فينتج الصورة المطلوبة.

Ch-3 Elementery Complex fn

في هذا الجزء
نحاول تجميع الخواص الهامة للدوال القياسية ونجهز صور
يحتوي علم الباب الأول والثاني (معيش معلومة جديدة)

[1] Polynomial:

$P_n(Z) = a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} + \dots + a_0$

the fn is entire on D — نتيجة الأعداد المركبة

[2] Exponential fn:

$f(z) = e^z$ is entire — الدالة e^z analytic عند أي

الدالة اللي ملهاش مقام و — analytic عند —

[3] logarithmic fn:

$\ln(Z) = \ln(r e^{i(\theta \pm 2n\pi)})$

$\ln(x+iy) = \ln r + i(\theta \pm 2n\pi)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

at $n=0$ the value is aprinciple value

Ex: Evaluate:

1. $\ln(1+i)$
2. $(1+i)^{1+i}$
3. the root of $e^z+1=0$ is $|z|<10$

Sol

① $x=1$, $y=1$, $r=\sqrt{2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45°$

$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)$

② $Z = (1+i)^{1+i} = e^{\ln(1+i)^{1+i}}$

$= e^{(1+i)\ln(1+i)} =$

$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)$

$e^{(1+i)[\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)} = e^{\ln z - (\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)} e^{i[\ln\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)]}$

$= e^{\ln z - (\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)} [\cos(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi) + i\sin(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)]$

③ $e^z + 1 = 0 \quad ; \ |z| < 10$

$e^z = -1$

$z = \ln(-1)$

$x = -1 \ , \ y = 0 \quad , \ r = 1 \quad , \ \theta = \pi$

$Z = \ln(1) + i(\pi \pm 2n\pi)$

$Z_n = i(1 \pm 2n)\pi$

$n = 0 \Rightarrow Z_0 = i\pi \in D \qquad D: \text{Desk}$

$n = 1 \Rightarrow Z_1 = i3\pi \in D$

$\cancel{n=2} \Rightarrow Z_{-1} = -i\pi \in D$

$n = -2 \Rightarrow Z_{-2} = -i3\pi \in D$

لمعرفة القيم التي تقع داخل الدائرة
بدون رسم نعوض عن قيم n ونحسب
القياس لو طلع أقل من ١٠ يبقى جوا الدايرة
ولو طلع أكبر من ١٠ يبقى برا الدايرة